GARA DI MATEMATICA ON-LINE (04/12/2023)

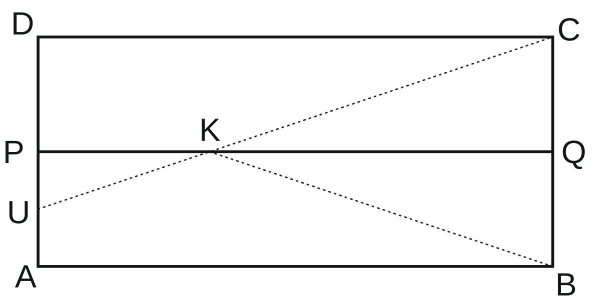
1. [137]
Senza posti vuoti abbiamo 1 sola possibilità. Con un solo posto vuoto abbiamo 16 casi, mentre con due posti vuoti vi sono $\binom{16}{2}=120$ casi possibili.
In totale $1+16+120=137$ configurazioni.

2. [585]
Siccome $4096=2^{12}$ gli iscritti all'università Biconcava sono:
$\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{12}}\right)2^{12}=2^9+2^6+2^3+1=512+64+8+1=585$.

3. [825]
Abbiamo le seguenti informazioni: $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}}_{\text{div } 11}\boxed{D}}_{\text{div } 25}\boxed{E}\boxed{F}}_{\text{div } 4}$.
Il criterio di divisibilità per 4 ci dice che per le cifre EF abbiamo $100:4=25$ possibilità (da 00 a 96).
Il criterio di divisibilità per 25 ci dà 4 casi per le cifre CD: 00, 25, 50 e 75.
Valutiamo i casi possibili per le prime 3 cifre sfruttando il criterio di divisibilità per 11. Siccome C ha 4 casi (per quanto visto prima) e A ha 9 possibilità (non potendo essere 0), la loro somma modulo 11 sarà necessariamente la cifra B, tranne quando $(A+C)\bmod 11=10$. Delle $9\cdot 4=36$ possibilità dobbiamo escludere $A=3$ $C=7$; $A=5$ $C=5$ e $A=8$ $C=2$.
In totale abbiamo $33\cdot 25=825$ numeri di matricola possibili.

4. [800]
Il numero cercato è il più piccolo n tale che $\star\star\star\star,00125\cdot n$ sia un numero intero.
Siccome $0,00125=\frac{125}{100000}=\frac{1}{800}$, $n=800$.

5. [300]
Andare da U a B passando per K con il percorso minimo possibile, equivale ad andare da U a C in linea retta. Riferendoci alla figura a fianco riportata, calcolare PK è facile sfruttando la similitudine tra i triangoli PKU e DCU. $UD:UP=CD:PK$ da cui otteniamo $PK=\frac{UP\cdot CD}{UD}=\frac{100\cdot 900}{300}=300 \text{ attoparsec}$.

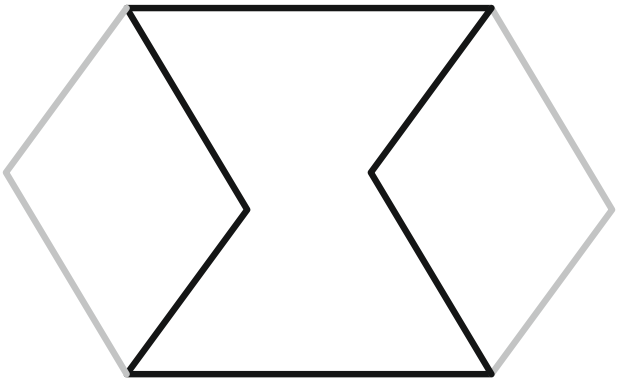


6. [34]
Sia $x_1=2\text{ min}$ e $x_2=3\text{ min}$ il tempo di studio della prima e della seconda settimana; e sia $y_1=x_2-x_1=1\text{ min}$ la differenza tra i due tempi. Sappiamo che $y_n=2\cdot y_{n-1}$. Dobbiamo calcolare x_{12}.
Sviluppando y_i otteniamo che $y_n=2^{n-1}$.
Scrivendo le differenze per x_i, abbiamo

$y_1=x_2-x_1$
$y_2=x_3-x_2$
...
$y_{11}=x_{12}-x_{11}$

Eseguendo la somma tra tutte le equazioni otteniamo
$\sum_{i=1}^{11} y_i=x_{12}-x_1$ da cui si ha: $1+2+...+2^{10}=x_{12}-2$, cioè $x_{12}=2^{11}+1\text{ min}=34\text{ ore e }9\text{ min}$.

7. [505]



La situazione del problema è quella rappresentata nella figura sopra riportata. La differenza tra i due esagoni è pari alla somma dei due parallelogrammi (congruenti) che si formano tra i lati dell'esagono concavo e quello convesso. L'area massima di questi quadrilateri ottiene quando diventano rettangoli.

L'area richiesta è $12,21\cdot 20,72\cdot 2 = 505,9824\ \text{cm}^2$

8. [16]
La probabilità richiesta è:

$$P = \frac{\frac{1}{5}\cdot 250}{750} = \frac{1}{15}.$$

9. [2104]
Sostituiamo β sfruttando le informazioni note:

$$100\beta = 100\left(\alpha^8 - \frac{2}{5}\alpha\right) = 100\left(\left(\frac{\alpha}{5}+1\right)^2 - \frac{2}{5}\alpha\right).$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $\alpha^4 = \frac{\alpha}{5}+1$. Sviluppiamo i calcoli.

$$= 100\left(\frac{\alpha^2}{25}+1\right) = 4\alpha^2 + 100.$$

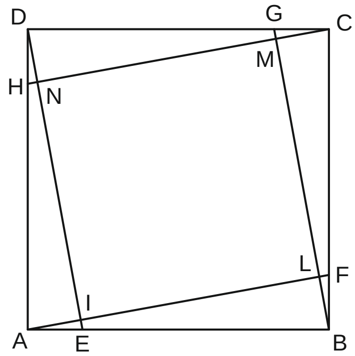
Stimiamo il valore di α come zero della funzione $f(x) = x^4 - \frac{x}{5} - 1$.

Osserviamo che $f(0) = -5$, $f(1) = -1$ e $f(2) = 32$. La soluzione deve necessariamente essere un valore molto "vicino" a $x = 1$.
Calcoliamo $f(1,1) = 0,2441$. La soluzione verifica la disuguaglianza $1 < x < 1,1$, ma questo è sufficiente per stimare β: $104 < 4\alpha^2 + 100 < 104,4$ la cui parte intera è 104.

10. [131]
Supponiamo $a = 5$ e $a \leq b \leq c$ e riscriviamo la condizione assegnata:
$5b + bc + 5c = 1998$.
Aggiungiamo 25 ad ambo i membri in modo da riuscire a fattorizzare la prima parte dell'equazione:
$5b + bc + 5c + 25 = 2023$
$(b+5)(c+5) = 2023$.

Siccome $2023 = 7\cdot 17^2$ e visto che $b \geq 5$ e $b \leq c$, l'unica possibilità risulta $b+5 = 17$ e $c+5 = 7\cdot 17$ che ci porta a determinare $b = 12$ e $c = 114$.
La soluzione richiesta è $5+12+114 = 131$.

11. [11]



Sia $AB = 1\ \text{cm}$ così $A_{ILMN} = \frac{50}{61}$, e sia $AE = x$.

I triangoli AEI e FLB sono congruenti per costruzione e simili al triangolo ABF.

Siccome $AF = \sqrt{x^2+1}$, il loro rapporto di similitudine è $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Abbiamo quindi che $AI = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ e $EI = FL = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

$IL = \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$ e quindi $\frac{(1-x)^2}{x^2+1} = \frac{50}{61}$.

Risolviamo l'equazione ottenuta:

$11x^2 - 122x + 11 = 0$ ha per soluzioni $x = 11$ (non accettabile in quanto $x < 1$) e $x = \frac{1}{11}$.

Il rapporto richiesto è $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{\frac{1}{11}} = 11$.

12. [82]

La soluzione dell'equazione omogenea associata $2023x + 25y = 0$ è $(25k; -2023k)$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione $2023x + 25y = 2$. Senza scomodare la teoria, sfruttando il fatto che $2025 - 2023 = 2$, abbiamo la soluzione $(-1; 81)$. La soluzione generale è dunque $(-1+25k; 81-2023k)$ e quindi il minimo per $|x| + |y|$ lo si ottiene proprio per $k = 0$.

La soluzione richiesta è $|-1| + |81| = 82$.

13. [193]

Sia $p(x) = q(x) - 1$.

$q(x)$ ha 11, 13 e 17 come zeri, quindi per il Teorema di Ruffini $q(x) = a(x)(x-11)(x-13)(x-17)$.

Siccome $p(x)$ è di terzo grado, $a(x)$ non può essere un polinomio ma de ve essere una costante k.

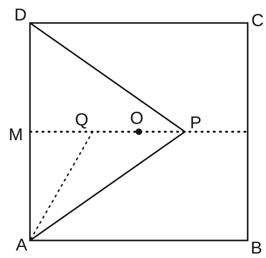
$p(x) = k(x-11)(x-13)(x-17) + 1$.

Ora $p(19) = 96k + 1$ e per essere un numero di tre cifre, deve accadere che $k = 2$ e quindi $p(19) = 193$.

14. [7216]

Abbiamo 9 possibilità per la cifra delle decine di migliaia (0 non è permesso);
abbiamo 9 possibilità per la cifra delle migliaia (non possiamo usare la cifra scelta prima);
abbiamo 8 possibilità per la cifra delle centinaia (non possiamo usare la cifre scelte in precedenza);
abbiamo 7 possibilità per la cifra delle decine (non possiamo usare la cifre scelte in precedenza);
abbiamo 6 possibilità per la cifra delle unità (non possiamo usare la cifre scelte in precedenza).
In totale $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ numeri possibili.

15. [5486]



Detto $PQ = x$, riferendoci alla figura a fianco, osserviamo il triangolo AMQ:

$AM = 5000\ \text{cm}$; $MQ = 5000 - \frac{x}{2}$ e $AQ = 2x$ in virtù del fatto che Q è il circocentro del triangolo APD. Applicando il Teorema di Pitagora si ha che $k^2 + \left(k - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2$, dove per comodità di calcolo abbiamo utilizzato $k = 5000$.

Risolvendo: $3x^2 + 4kx - 8k^2 = 0$ ci porta a determinare l'unica soluzione accettabile:

$x = \frac{2(\sqrt{7}-1)}{3}k \cong 5486\ \text{cm}$ sfruttando l'approssimazione fornita dal testo.

16. [4999]
Sia $p_n(i)$ la probabilità che dopo n anni l'insegnante si trovi al piano i-esimo.
Ovviamente, essendoci sono due piani, $p_n(1)+p_n(2)=1$. Supponiamo inizialmente si trovi al primo piano e quindi $p_0(1)=1$ e $p_0(2)=0$.
Vogliamo calcolare $p_{25}(2)=\frac{2}{3}p_{24}(2)+\frac{1}{3}p_{24}(1)=\frac{2}{3}p_{24}(2)+\frac{1}{3}\left(1-p_{24}(2)\right)=\frac{1}{3}p_{24}(2)+\frac{1}{3}$.
Applicando la regola ricorsiva altre 24 volte, giungiamo alla soluzione

$$p_{25}(2)=\frac{1}{3^{25}}p_0(2)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{25}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{25}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{25}}\right) \text{ che è poco meno di } \frac{1}{2}.$$

Dovendo calcolare $1000p_{25}(2)$ possiamo essere certi che sarà $4999{,}9999\ldots$ e quindi la risposta al problema è 4999.

17. [150]
Sfruttiamo la disuguaglianza tra la media aritmetica e quella geometria:

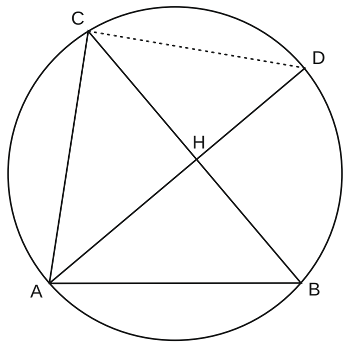
$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6}\ge\sqrt[6]{\frac{xy^2z^3}{2^2\cdot3^3}} \text{ e quindi}$$

$$\frac{x+y+z}{6}\ge\sqrt[6]{\frac{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3^3}\cdot5^{12}}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3^3}}}$$

$$\frac{x+y+z}{6}\ge25$$

$$x+y+z\ge150$$

Il minimo possibile è 150.



18. [1458]
Il fatto che $A\hat{B}H=H\hat{D}C$ ci dice che il quadrilatero $ABDC$ è ciclico.
Sappiamo che $AH=6\sqrt{3}$ e $HD=3\sqrt{3}$.
Per il Teorema delle corde: $AH\cdot HD=CH\cdot HB$, quindi

$$A_{ABH}\cdot A_{AHC}=\frac{BH\cdot AH}{2}\cdot\frac{HC\cdot AH}{2}=\frac{AH\cdot HD\cdot AH^2}{4}=\frac{HD\cdot AH^3}{2}=\frac{3\sqrt{3}\cdot648\sqrt{3}}{4}=1458\ \text{cm}^2$$

19. [799]
Fattorizzando, abbiamo
$(a+pb)(a-pb)=7\cdot17^2$
Deve necessariamente essere:
$\begin{cases}a+pb=289\\a-pb=7\end{cases}$ che risolto porta a determinare $a=148$ e $pb=141=3\cdot47$;
oppure
$\begin{cases}a+pb=119\\a-pb=17\end{cases}$ che risolto porta a determinare $a=68$ e $pb=51=3\cdot17$;
I possibili numeri primi p sono 17 e 47 e il loro prodotto vale 799.

20. [9215]
Possiamo usare solamente i numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.
Gli unici casi possibili sono:

$32=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$	$429=3\cdot11\cdot13$	$1309=7\cdot11\cdot17$	$2023=7\cdot17\cdot17$
$243=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$	$507=3\cdot13\cdot13$	$1547=7\cdot13\cdot17$	$3125=5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$

La cui somma vale 9215.

21. [25]

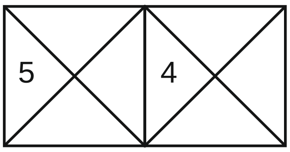
Siccome un vertice tocca 4 facce, il minimo numero di colori che possiamo usare è 4.

Valutiamo i due casi.

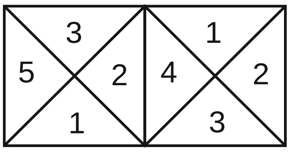
Scelti i 4 colori tra i 5 disponibili, le facce opposte dell'ottaedro dovranno essere colorate allo stesso modo, quindi scelta la configurazione delle facce della "piramide" superiore, quella inferiore sarà obbligata. Abbiamo 5 ottaedri possibili.

Con 5 colori dovremo necessariamente scegliere 2 facce opposte da colorare con 2 colori diversi, mentre con i restanti 3 colori dovremmo necessariamente colorare le facce opposte.

Scegliamo i 3 colori che si ripetono in $\binom{5}{3}=10$ modi diversi, siano essi 1-2-3 mentre 4 e 5 gli altri due colori. Fissiamo le due facce opposte colorate con questi ultimi due.



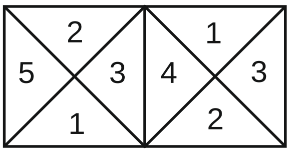
Inseriamo la colorazione delle tre facce mancanti in uno dei possibili modi, ad esempio:



Leggiamo a partire dal colore 4 (in senso orario) le possibili rotazioni equivalenti ottenute:
4-1-2-3, 4-2-3-1 e 4-3-1-2.

Ci mancano alcuni casi.

Posizionando i colori nel modo seguente:



Otteniamo i casi mancati: 4-1-3-2, 4-3-2-1 e 4-2-1-3

Abbiamo $10\cdot 2=20$ ottaedri possibili.

In totale $5+20=25$ diversi ottaedri.